ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Μονάδες 7

Α2. α) Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 4

β) Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$;

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) έχει εξίσωση της μορφής $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$

β) Η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$ είναι ευθεία παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

γ) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

δ) Η παράσταση $((\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \overrightarrow{\gamma}) \cdot \vec{\delta}$ παριστάνει διάνυσμα.

ε) Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με

$(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -3)$, $\vec{\beta} = (1, \lambda^2 + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$2 \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta} = (3, -11)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 6

Για $\lambda = 2$

Β2. Να αποδείξετε ότι για την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Αν O η αρχή σ' ένα σύστημα αξόνων xOy και για τα σημεία του επιπέδου A και B ισχύουν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ να βρείτε:

α) τις εξισώσεις της διαμέσου $O\Delta$ και του ύψους OM του τριγώνου OAB.

Μονάδες 6

β) τις συντεταγμένες του σημείου M.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Σε σύστημα αξόνων xOy δίνονται οι ευθείες ε_1: $2x + \psi = 4$ και η ε_2 που σχηματίζει γωνία $\widehat{\omega} = \frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $y = x + 1$ και ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $K(1,2)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τα σημεία Γ και Δ της ευθείας ε_2 τα οποία απέχουν από την ε_1 απόσταση ίση με $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή το σημείο O, άξονα συμμετρίας τον $x'x$, η οποία διέρχεται από το K και έπειτα να δείξετε ότι η εφαπτομένη της στο K είναι η ευθεία ε_2.

Μονάδες 6

Γ4. α) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (ζ) η οποία διέρχεται από το σημείο τομής της διευθετούσας της παραβολής και της ευθείας ε_1 και είναι παράλληλη στην ε_2.

Μονάδες 2

β) Για οποιοδήποτε σημείο Λ της ευθείας (ζ) να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Lambda\Gamma\Delta$ είναι ίσο με 12 τμ.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ και

$C_2: (x-\lambda)^2 + (\psi - \lambda - 2)^2 = 2,\ \lambda \in \mathbb{R}$, με κέντρα Κ και Λ αντίστοιχα, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Για $\lambda = 1$.

Δ2. α) Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον $x'x$ και τα σημεία τομής του κύκλου C_2 με τον $y'y$.

Μονάδες 2

β) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον $x'x$ και του κύκλου C_2 με τον $y'y$ αντίστοιχα τα οποία απέχουν την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι η ευθεία AB είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Μονάδες 4

Δ3. α) Να αποδείξετε ότι η κοινή τους εφαπτομένη, ευθεία (ε), που διέρχεται από το σημείο επαφής τους, είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τα σημεία M και M' της ευθείας (ε) που με τα κέντρα των κύκλων C_1 και C_2 σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MKM'\Lambda$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 4